学校编号： 10384 分类号： ________ 密级： ________
学　　号： 2005170012 UDC: ________

厦　门　大　学
硕　士　学　位　论　文

非线性反常次扩散方程和分数阶 Rayleigh-Stokes 问题的 Adomian 分解法

The Adomian decomposition method for the non-linear anomalous subdiffusion equation and the fractional Rayleigh-Stokes problem

宋 吉 茜

指导教师姓名：庄平辉　　副教授、硕导

申请学位级别：硕　士　学　位
专 业 名 称：计　算　数　学
论文提交日期：2008 年 4 月
论文答辩日期：2008 年　　月
学位授予单位：厦　门　大　学
学位授予日期：2008 年　　月

答辩委员会主席：________________

评阅人：________________

2008 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1. 保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2. 不保密（ ）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘 要

近些年来，人们逐渐发现分数阶导数在许多科学领域中，特别在工程、物理、金融、水文等领域发挥了越来越重要的作用，而且在模拟物理现象时分数阶微分方程是一个很有用的数学工具。近年来，本文所讨论的非线性反常次扩散方程 (NA-SubDE) 和带有分数阶导数模型的加热一般第二级流体的 Rayleigh-Stokes 问题 (RSp-hgsgf) 受到越来越多的关注，但是有效的求解非线性反常次扩散方程的方法仍然处于初期阶段，而且 RSp-hgsgf 里速度场和温度场的精确解的实际值很难计算出来。

本文用 Adomian 分解方法分别考虑了非线性反常次扩散方程和带有分数阶导数模型的加热一般第二级流体的 Rayleigh-Stokes 问题。Adomian 分解方法能够很好的处理非线性项，并且不用离散方程就能提供高精度的近似解，而且增加分解序列新的项就能使总体误差变的很小，因此通过 Adomian 分解方法可以很有效的得到非线性反常次扩散方程的近似解。对于本文所讨论的第二类方程：含有分数阶导数模型的加热一般第二级流体的 Rayleigh-Stokes 问题 (RSp-hgsgf)，通过 Adomian 分解方法可以很有效的得到 RSp-hgsgf 的速度场和温度场的近似解。在每一部分都给出了数值例子来证实所提出的数值方法的有效性。从本文的讨论中可以看出本文中所提出的数值方法也适用于求解其他类型的分数阶微分方程。

关键词： 分数阶导数，分数阶积分， Adomian 分解方法。

Abstract

In recent years, fractional calculation plays a more and more important role in various fields of science, especially in engineering, physics, finance, and hydrology. Differential equations with fractional order have recently proved to be valuable tools to modeling of many physical phenomena. Recently, the non-linear anomalous subdiffusion equation(NA-SubDE) and the Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid(RSp-hgsgf) have been treated by many authors. However, effective methods for the non-linear anomalous subdiffusion equation (NA-SubE) are still in their infancy. Furthermore, the reality value of exact solutions of the velocity and temperature fields of RSp-hgsgf are difficult to compute.

In this paper, we discuss the non-linear anomalous subdiffusion equation and the Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid by using Adomian decomposition method. The Adomian decomposition method can perfectly deal with nonlinear term, and provide highly accurate numerical solution without discretization for the problem. The overall errors can be reduced to a much smaller extent by adding new terms of the decomposition series. We can obtain approximate solution of the non-linear anomalous subdiffusion equation by using Adomian decomposition method. For the Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid(RSp-hgsgf), we can obtain approximate solutions of the velocity and temperature fields of RSp-hgsgf by using Adomian decomposition method. Numerical examples are presented in each chapter, which verify the efficiency of the above numerical method. The techniques can also be applied to deal with other types of fractional order differential equations.

Keywords: Fractional derivative,Fractional integral,Adomian decomposition method.

目　　录

Content

序　言

近几十年来，人们逐渐发现分数阶导数在许多科学领域中发挥了越来越重要的作用，特别在工程，物理，金融，水文等领域 [1,2,3,4] 。近年来已经证明了分数阶的微分方程对于模拟许多物理现象是一个很有用的数学工具。与整数阶模型相比，分数阶模型在某些领域能与实际现象更吻合 [2,5,6] 。

1926 年 Richardson 关于湍流扩散的论文发表后，反常扩散被世人所关注。在许多复杂的系统里，扩散过程不再呈现高斯分布，相应的 Fick 第二定律也不能描述相关的传输行为。次扩散运动在一些复杂的系统里是特别重要的，比如在反常碎片形几何上的传输、多孔渗水的系统、在聚合的系统里动力学的激发等问题 [7] 。分数阶核方程已经证明在描述反常慢扩散（次扩散）过程中非常有效。次扩散运动由如下形式

$$\langle x^2(t)\rangle - \frac{2K_\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}t^\gamma, \quad t \to \infty,$$

的平均平方位移的渐进长时间性态来表示。这里 $0 < \gamma < 1$ 是反常次扩散的指数。次扩散运动在复杂系统中应用广泛。 Yuste 和 Lindenberg[8] 讨论了粒子在一维情况次扩散反应下移动的凝结动力学和湮灭动力学问题。 Yuste 和 Lindenberg[9] 考虑了这两种现象的结合，并提出了解一维情况下反应次扩散问题。为了推广扩散问题到反应次扩散问题，我们必须处理粒子的次扩散运动。

因为在一个随机等待时间后就会出现一个随机粒子跳跃，所以连续时间随机游走模型就能用来推导反常扩散。非常大的粒子跳跃就可以和空间分数阶导数联系起来 [10], 同样非常长的等待时间就能推出时间分数阶导数 [11] 。在连续时间随机游走模型中，粒子跳跃的大小依赖于跳跃之间等待的时间。对于这些模型，被限制的粒子分布是含有空间 - 时间分数阶导数算子的分数阶微分方程所控制的 [12] 。

对于反常次扩散随机游走，连续统一体描述是用分数阶次扩散方程代替普通扩散方程而得到的，其中描述反常扩散粒子的概率密度函数 $u(x,t)$ 满足下面反常次扩散方程：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^{1-\gamma}}{\partial t^{1-\gamma}}[K_\gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}], t \geq 0, \tag{1}$$

其中 $\gamma(0 < \gamma < 1)$ 是反常扩散指数， K_γ 是一般扩散系数。

已经有很多人提出了求解空间、时间、空间 - 时间分数阶偏微分方程的不同的数值方法。 Liu 等人 [13,14] 用行方法把分数阶偏微分方程转化为常微分方程组，然后用向后差分公式来求解方程。 Roop[15] 研究了分数阶对流扩散方程变分解的数值近似。 Meerschaert 等人 [16] 对于分数阶对流 - 扩散流方程提出了有限差分近似。 Zhuang 和 Liu [17] 用有限差分近似研究二维时间分数阶扩散方程。Shen 等人 [18] 对于空间分数阶扩散方程提出了一个显式有限差分近似，并且给出了误差估计。 Liu 等人 [19] 用随机游走和有限差分方法来讨论 Lévy-Feller 对流 - 扩散过程的近似。 Zhang 等人 [20] 用数值逼近来讨论 Lévy-Feller 扩散过程和它的概率解释。 Liu 等人 [21] 对于时间分数阶扩散方程推导出一个离散的非马尔可夫随机游走近似的分析。 Zhuang 和 Liu[22] 提出了时间分数阶扩散方程的一种隐式格式，利用分数阶离散系数的特点，给出了收敛性及稳定性分析。 Liu 等人 [23] 用差分方法研究空间 - 时间分数阶对流 - 扩散方程，并给出了稳定性和收敛性分析。Lin 和 Liu [24] 对于分数阶常微分方程 (FODE) 提出了高阶 (2-6 阶) 近似，并且分析了这些分数阶高阶方法的相容性，稳定性和收敛性。 Jafari 和 Daftardar-Gejji[25] 用 Adomian 分解方法求解线性、非线性分数阶扩散和波方程。

分数阶微分方程的数值解有了一定进展，但是对于非线性分数阶微分方程数值求解相当困难，尤其是非线性反常次扩散方程的求解更加困难，相关方面的研究都还处在全面探索阶段。本文的首个目的是利用 Adomian 分解方法来求解非线性反常次扩散方程 (简记为 NA-SubDE):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_t^{1-\gamma}[K_\gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t,u(x,t))], t \geq 0, 0 < \gamma < 1, \tag{2}$$

$$u(x,0) = p(x), \tag{3}$$

其中 K_γ 是扩散系数， $f(x,t,u(x,t))$ 是一个连续函数， $D_t^{1-\gamma}$ 是 $1-\gamma$ 阶的 Riemman-Liouville 时间分数阶导数。

同样地， Navier-Stokes 问题很难得到精确解，特别当我们考虑到黏弹性流体的本质关系时就更难得到精确解了。然而，由于黏弹性流体在许多领域特别是在生物流变学，地球物理，化学制品和石油工业 [26] 等领域的需要，黏弹性流体受到越来越多人的关注。因为很难建立一个简单的模型来描述黏弹性流体的所有性质，所以黏弹性流体不能象牛顿流体那样简单的表示。因此，人们提出了本质方程的许多模型。近年来，分数阶模型很好的描述了黏弹性流体。黏弹性流体的分数阶导数模型的出发点是用 Riemann-Liouville 分数阶算子代替经典微分方程里的整数阶时间导数。这个一般性允许我们精确的定义非整数阶积分和导数。 Bagley[27], Friedrich[28] 和 Tan[29] 相继在许多流变学问题中引进分数阶计算。分数阶导数在描述黏弹性流体的运动是可行的。

平板的 Stokes 第一类问题和边缘的 Rayleigh-Stokes 问题受到人们越来越多的关注 [30,31,32] 。在一个充满黏稠的不可压缩流体的半空间里，一个无限的平板在静止状态下突然以常速度开始运动，这个不稳定流体问题讨论了流体运动的涡旋状的扩散。通过变量变换的相似性， Stokes 得到牛顿流体的精确解。但是对于一个第二级流体，严格相似的解不存在 [33] 。并且第二级流体的运动方程比 Navier-Stokes 方程高阶，所以一般情形下除了边界条件还额外需要其他条件。 Rajagopal 首先研究了这个问题，并且得到了一些精确解 ([34]-[39]) 。

然而，当内部摩擦不可忽略时，一个流体的温度分布的决定就显得非常重要。 Bandelli[34] 研究了取决于一些单向流体的一个第二级流体的热的对流问题。近年来， Fetecau[40] 延拓了 Rayleigh-Stokes 问题到一个加热第二级流体。 Shen 等人 [41] 研究了带有分数阶导数模型的加热一般第二级流体的 Rayleigh-Stokes 问题。通过傅立叶正弦变换和分数阶拉普拉斯变换得到了速度场和温度场的精确解，但是精确解的实际值却非常难计算出来。所以本文的第二个目的是用 Adomian 分解方法解带有分数阶导数模型的加热一般第二级流体的 Rayleigh-Stokes 问题 (RSp-hgsgf) 。

本文分别考虑了非线性反常次扩散方程和带有分数阶导数模型的加热一般第二级流体的 Rayleigh-Stokes 问题。为了便于读者阅读，本文先给出了有关的预备知识。列出了 Riemann-Liouville 分数阶导数和分数阶积分的定义和性质。第二章，考虑非线性反常次扩散方程， Adomian 分解方法能够很好的处理非线性项，并且不用离散方程就能提供高精度的近似解，而且增加分解序列新的项就能使总体误差变的很小，所以通过 Adomian 分解方法可以很有效的得到非线性反常次扩散方程的近似解。数值例子也证实了数值方法的有效性。第三章，考虑有分数阶导数模型的加热一般第二级流体的 Rayleigh-Stokes 问题 (RSp-hgsgf) 。通过 Adomian 分解方法可以很有效的得到速度场和温度场的近似解。最后，也给出了数值例子来说明方法的有效性。从本文的讨论中可以看出本文中所提出的数值方法也适用于求解其他类型的分数阶微分方程。

第一章 预备知识

这一章给出 Riemann-Liouville 分数阶导数和分数阶积分的定义和性质 [1,42], 这些定义和性质在本文后面的讨论中将会用到。

定义 1.1 ：（ Riemann-Liouville 定义的分数阶导数） [1] ：

$$
{}_aD_t^{\beta}f(t)=\begin{cases}\frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_a^t\frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-m}}\right], & 0\le m-1\le\beta<m,\\ \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t), & \beta=m\in N.\end{cases} \tag{1.1}
$$

为了简便，接下来我们用算子 D_t^{β} 来表示算子 ${}_0D_t^{\beta}$ 。下面给出 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义：

定义 1.2：设 $\alpha\in\mathbb{R}_+$, 在通常的 Lebesgue 空间 $L_1[0,b]$ 上的 β 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分算子 J_t^{β} 定义为 [43]:

$$
\begin{aligned}J_t^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-x)^{\beta-1}f(x)dx,\beta>0,t>0,\\ J_t^0f(t) &= f(t).\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Riemann-Liouville 分数阶积分算子 J_t^{β} 和分数阶导数算子 D_t^{β} 有下面的性质 [1]:

性质 1.1 ：如果 $f\in L_1[0,b],\alpha,\beta\ge0$ 和 $\gamma>-1$, 则

$$
\begin{aligned}&1.\quad J_t^{\alpha}J_t^{\beta}f(t)=J_t^{\alpha+\beta}f(t),\\ &2.\quad J_t^{\alpha}J_t^{\beta}f(t)=J_t^{\beta}J_t^{\alpha}f(t),\\ &3.\quad J_t^{\alpha}t^{\gamma}=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}t^{\alpha+\gamma},\\ &4.\quad D_t^{\alpha}t^{\gamma}=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}t^{\gamma-\alpha}.\end{aligned} \tag{1.3}
$$

性质 1.2 ：对于常数 C 有

$$
D_t^{\alpha}C=\frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\alpha\ge0. \tag{1.4}
$$

性质 1.3 ：如果 $f\in L_1[0,b]$ 和 $0\le m-1\le\alpha<m$, 则

$$
\begin{aligned}
1.D_t^{\alpha} J_t^{\alpha} f(t) &= f(t), \\
2.J_t^{\alpha} D_t^{\alpha} f(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^{m} [D_t^{\alpha-k} f(0^+)] \tfrac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, \\
3.J_t^{1} D_t^{1} f(t) &= f(t) - f(0^+).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

第二章 用 Adomian 分解方法求非线性反常次扩散方程的近似解

本章考虑非线性反常次扩散方程 (NA-SubDE)：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_t^{1-\gamma}[K_\gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t,u(x,t))], t \geq 0, 0 < \gamma < 1, \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = p(x), \tag{2.2}$$

其中 K_γ 是扩散系数， $f(x,t,u(x,t))$ 是一个连续函数， $D_t^{1-\gamma}$ 是 $1-\gamma$ 阶的 Riemman-Liouville 时间分数阶导数。

非线性反常次扩散方程的数值方法非常有限，在这一章里应用 Adomian 分解方法来解 NA-SubDE[44,45] 。

§2.1 Adomian 分解方法的分析

NA-SubDE(2.1) 的算子形式为：

$$D_t^1 u(x,t) = D_t^{1-\gamma}[K_\gamma D_x^2 u(x,t) + f(x,t,u(x,t))], t \geq 0, 0 < \gamma < 1, \tag{2.3}$$

其中由定义 1.1 定义的时间分数阶微分算子和空间分数阶微分算子分别表示为： $D_t^1 = \frac{\partial}{\partial t}, D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 。

用算子 D_t^1 的逆算子 J_t^1 作用在方程 (2.3) 的两边，从而得到：

$$u(x,t) = u(x,0^+) + J_t^1 D_t^{1-\gamma}[K_\gamma D_x^2 u(x,t) + f(x,t,u(x,t))]. \tag{2.4}$$

假设

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \tag{2.5}$$

$$f(x,t,u(x,t)) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \tag{2.6}$$

其中 $u_n(x,t)$ 可以用递归方法来求解， B_n 是由 $u_0, u_1, \cdots, u_n$ 决定的 Adomian 多项式。分解序列的收敛性已经得到证明 [46,47] 。